



VALUE AT RISK: TEORIA Y APLICACIONES*

CHRISTIAN A. JOHNSON

Abstract

This article describes the Value at Risk concept, popularized during the last ten or fifteen years, presenting applications on stocks, bonds, interest and exchange rate forward contracts, and swaps. We applied asymmetric GARCH methodologies over Chilean stock indexes to enhance our risk evaluation performance. Liquidity adjusted Value at Risk methodologies for individual and multiple asset portfolios are discussed. To conclude, we applied this methodology to evaluate the performance in three Chilean financial institutions.

Resumen

El concepto de Value at Risk (valor del riesgo) se ha popularizado hace ya casi una década. Este artículo describe el significado de este concepto, y presenta aplicaciones sobre carteras de activos de bonos, acciones, forwards de tasa de interés y de tipos de cambio, y swaps. Se introducen asimetrías en la metodología de generación de volatilidades, a través de modelos de heteroscedasticidad asimétricos, de manera de proyectar mejor los niveles de riesgo futuros. Adicionalmente, se discute la metodología de ajuste del Value at Risk en un escenario de iliquidez de los activos que conforman un portafolio. Para esta situación se presenta un mecanismo de ajuste para el cálculo del indicador de riesgo de mercado VaR. Finalmente se efectúa una aplicación metodológica a una muestra de tres instituciones financieras analizando las volatilidades de las utilidades operacionales.

JEL Classification: G11, G12, C22.

Keywords: Value at Risk, GARCH, Volatility.

1. INTRODUCCIÓN

Esta sección revisa conceptos de valoración del riesgo midiéndolos en términos del Value at Risk (VaR). La difusión de este concepto en conjunto con la globalización de los mercados requiere de una actualización de las metodologías

* Agradezco los comentarios de un árbitro y del editor de *Estudios de Economía*.

□ Gerencia de Investigación Económica, Banco Central de Chile. Agustinas 1180, Santiago, Chile. Fono: (562) 670 2473, Fax: (562) 670 2853. E-mail: cjohnson@bcentral.cl





de evaluación de riesgo, sobre todo considerando la existencia de activos financieros complicados de evaluar como son los derivados.

Este documento revisa conceptualmente las diversas formas que existen para la evaluación del riesgo, ya sea de activos individuales o de portafolios de activos, desde un punto del concepto del *Value at Risk* (*VaR*). Consideraciones de iliquidez especialmente relevantes para mercados financieros pequeños, inmaduros e ilíquidos son incorporadas a las mediciones del riesgo.

Se presentan ejemplos prácticos y aplicaciones a indicadores accionarios (IGPA) e instituciones financieras como bancos comerciales, procedimientos que apoyarán la gestión de evaluación de riesgo de instituciones como compañías de seguros, bancos de inversión, agencias de corredoras de bolsa, administradoras de fondos de pensiones y bancos y financieras principalmente.

El artículo está organizado como sigue. La siguiente sección introduce el concepto de *Value at Risk*. La sección 3 presenta modelos de volatilidad variable del tipo GARCH considerando sus extensiones asimétricas, presentándose una aplicación al caso chileno. Las secciones 4 y 5 presentan la metodología de cálculo de *Value at Risk* para activos individuales como para portafolios de n activos, respectivamente. La sección 6 presenta la metodología de ajuste por liquidez, mientras que la parte 7 presenta una aplicación de evaluación del riesgo para tres instituciones financieras chilenas. Se finaliza con las conclusiones.

2. *VALUE AT RISK*: DESCRIPCIÓN CONCEPTUAL

El concepto de *Value at Risk* (*VaR*), o valoración del riesgo, proviene de la necesidad de cuantificar con determinado nivel de significancia o incertidumbre el monto o porcentaje de pérdida que un portafolio enfrentará en un período predefinido de tiempo (Jorion 2000, Penza y Bansal 2001, Best 1998, y Dowd 1998). Su medición tiene fundamentos estadísticos y el estándar de la industria es calcular el *VaR* con un nivel de significancia del 5%. Esto significa que solamente el 5% de las veces, o 1 de 20 veces (es decir, una vez al mes con datos diarios, o una vez cada cinco meses con datos semanales) el retorno del portafolio caerá más de lo que señala el *VaR*, en relación con el retorno esperado.

Si consideramos una serie de retornos históricos de un portafolio que posee un número n de activos, es factible visualizar la distribución de densidad de aquellos retornos a través del análisis del histograma. Es común encontrar fluctuaciones de retornos en torno a un valor medio levemente diferente de cero (este concepto en estadística se denomina proceso con reversión a la media) y cuya distribución se aproxima a una normal. Leves asimetrías (*skewness*) son a veces percibidas en los retornos, pero desde un punto de vista práctico es suficiente asumir simetría en la distribución. Una vez generada la distribución se debe calcular aquel punto del dominio de la función de densidad que deja un 5% o 1% del área en su rango inferior (α). La distancia de este punto en el dominio de la distribución en relación al valor esperado de la distribución se denomina *Value at Risk* (Gráfico 1).

Analíticamente, el *VaR* se define por el límite superior de la integral de la función de retornos esperados:



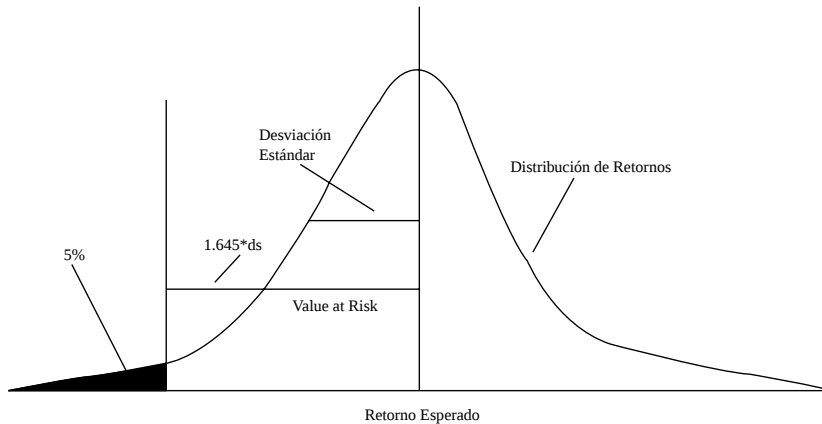
$$(1) \quad \int_{-\infty}^{E[r]-VaR} r(s)ds = \alpha$$

Usualmente se asume que el valor esperado de los retornos es cero, $E[r] = 0$, con lo cual la solución a la expresión (1) se transforma a:

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{-VaR} r(s)ds = \alpha$$

GRAFICO 1

REPRESENTACION GRAFICA DEL VALUE AT RISK



Una representación alternativa consiste en estimar el VaR a través de la siguiente expresión:

$$(3) \quad VaR = \alpha \cdot \sqrt{\sigma^2 \cdot \Delta t}$$

donde α es el factor que define el área de pérdida de los retornos¹, σ^2 la varianza de los retornos, y Δt el horizonte de tiempo para el cual se calculará el factor de riesgo VaR .

En la medida que delimitamos un α de 5% o 1% como área de pérdida, debemos multiplicar a la desviación estándar de la serie de retornos ($\hat{\sigma}$) por 1,645 ó 2,325, respectivamente. Es decir, si el retorno esperado para un portafolio

¹ La tabla de la distribución normal estandarizada entrega los siguientes valores para los factores de ajuste:

Porcentaje	10%	5%	1%	0,5%
Factor α	1,282	1,645	2,325	2,575





lio es de 4% y la desviación estándar es de 2%, entonces el *VaR* (con un nivel de significancia del 5%) indicará que este portafolio podría sufrir una pérdida superior a $1,645 \cdot 2 = 3,29\%$ en sus retornos esperados, pasando de 4% a 0,71% o menos, solamente el 5% de las veces (1 de 20 veces, es decir, utilizando información diaria esto significa una vez por mes). Si medimos en términos monetarios, asumiendo una riqueza financiera de \$ 200.000,00 entonces el *VaR* alcanzaría a \$ $200.000,00 \cdot 0,0329 = \$ 6.580,00$. Es decir, en lugar de rentar \$ 8.000,00 (4% de \$ 200.000,00), un 5% de las veces el portafolio podría ver disminuida esta rentabilidad en \$ 6.580,00 o más de un día para otro.

3. MODELOS DE VOLATILIDAD GARCH Y GARCH ASIMÉTRICOS

Para el caso de un activo, el riesgo de mercado se calcula considerando la fluctuación de precios que puede sufrir el activo durante el período de evaluación (un día, una semana, un mes, un trimestre, etc.). Estas fluctuaciones se pueden proyectar a través de análisis econométricos de la volatilidad histórica que ayudan a predecir la volatilidad esperada para los períodos siguientes.

Generalizando la ecuación (3) para el caso de volatilidades variables en el tiempo, llegamos a representar el *VaR* para el período Δt como:

$$(4) \quad VaR_{t+\Delta t} = \alpha \cdot \sqrt{\sigma_{t+\Delta t}^2 \cdot \Delta t}$$

donde debemos proyectar $\sigma_{t+\Delta t}$ utilizando modelos de heteroscedasticidad condicionada simples o generalizados, o modelos ARCHs y GARCHs respectivamente.

Un ejercicio de proyección consistiría, por ejemplo, en estimar un sistema de dos ecuaciones que representen la evolución de los retornos y su volatilidad simultáneamente, es decir:

$$(5) \quad \begin{aligned} r_t &= \theta + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &\sim N(0, \sigma_t^2) \\ \sigma_t^2 &= \gamma + \sum_{i=1}^p \beta_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \phi_j \sigma_{t-j}^2 \end{aligned}$$

donde θ representa el retorno promedio de los precios (*drift*).² Los coeficientes asociados a los p rezagos de ε_t^2 definen la parte ARCH del modelo, mientras que coeficientes asociados a los q rezagos definen la parte GARCH de la volatilidad.

Los retornos son generados usualmente como el diferencial logarítmico (natural) de los niveles de precios del activo analizado, es decir $r_t = (\ln(p_t) - \ln(p_{t-1})) \cdot 100$ o en su versión reducida como: $r_t = \ln\left(\frac{p_t}{p_{t-1}}\right) \cdot 100$. En

² Usualmente este parámetro es cero en las aplicaciones de datos diarios.



definitiva, esta transformación indica que el proceso generador de los precios obedece a una distribución $\log_e$ -normal, hecho que garantiza que éstos no tomen valores negativos en ningún momento t .

Una característica de estos modelos GARCHs tal como lo hemos expuesto es que la volatilidad que generan frente a *shocks* de mercado inesperados tienen una respuesta que es simétrica.

Dado que el proceso que genera la varianza de los retornos del activo es $\sigma_t^2 = \gamma + \sum_{i=1}^p \beta_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \phi_j \sigma_{t-j}^2$, podemos considerar que la respuesta de la volatilidad a un *shock* está dada por el componente ARCH del modelo, es decir que para un modelo GARCH(1,0) por ejemplo:

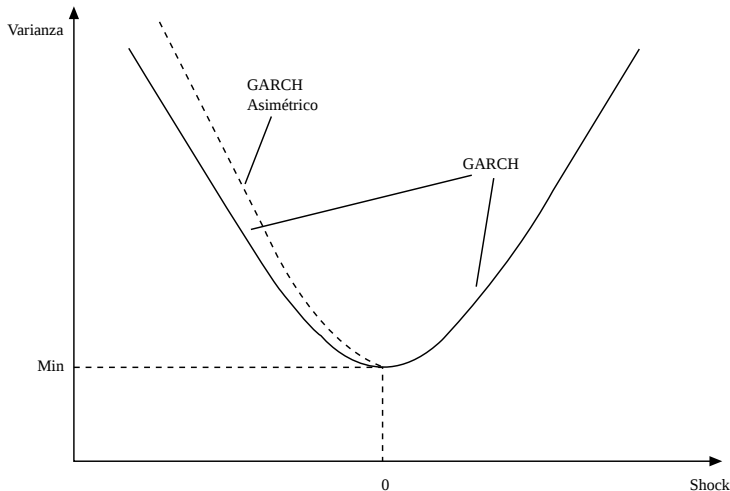
$$(6) \quad \sigma_t^2 = \Psi + \beta_1 \varepsilon_{t-1}^2$$

donde $\Psi = \gamma + \sum \phi_j \sigma_{t-j}^2$. Claramente la respuesta de la varianza condicionada en el valor del *shock* tiene una forma cuadrática con un mínimo en Ψ y una sensibilidad definida por el coeficiente β_1 .

La reacción de la varianza (o volatilidad) a *shocks* de diversas magnitudes se puede representar por la Curva de Impacto de Noticias (*News Impact Curve*) o NIC, la cual permite visualizar el efecto sobre la volatilidad de *shocks* de los retornos del activo analizado³. Es aquí donde se verifica la respuesta simétrica de la volatilidad a *shocks* ya sean positivos o negativos de los retornos inesperados (Gráfico 2).

GRAFICO 2

CURVA DE IMPACTO DE NOTICIAS: NIC



³ Aplicaciones para el caso chileno de modelos de intervención y modelos para analizar la inflación con esta metodología se pueden revisar en Johnson (2001a) y Johnson (2001b).



Una situación distinta ocurre sin embargo en la práctica. Existe una gran asimetría en la respuesta de la volatilidad de los retornos de un activo dependiendo si el *shock* sobre éstos es positivo o negativo. Un impacto no esperado negativo sobre los retornos de un activo ($\varepsilon < 0$) induce en la práctica a un incremento de la volatilidad más allá de lo que predicen los modelos GARCH simétricos.

Con el fin de representar esta respuesta asimétrica es que existe una variedad de modelos que capturan este comportamiento. Un listado breve incluiría al *Threshold* GARCH, *Quadratic* GARCH, Glossten-Jagannathan-Runkle GARCH, y en un formato más general el Box-Cox GARCH. Sus formas funcionales se representan en el Cuadro 1.

CUADRO 1

MODELOS ECONOMETRICOS DE VOLATILIDAD

GARCH(1,1)	$\sigma_t^2 = \gamma + \beta \varepsilon_{t-1}^2 + \phi \sigma_{t-1}^2$
T-GARCH(1,1)	$\sigma_t^2 = \gamma + \beta \varepsilon_{t-1}^2 + \phi \sigma_{t-1}^2 + \varphi \tau_{t-1} \varepsilon_{t-1}^2$ $\tau_{t-1} = \begin{cases} 1 & \text{if } \varepsilon_{t-1} \leq 0 \\ 0 & \text{if } \varepsilon_{t-1} > 0 \end{cases}$
Q-GARCH(1,1)	$\sigma_t^2 = \gamma + \beta \varepsilon_{t-1}^2 + \phi \sigma_{t-1}^2 + \varphi \varepsilon_{t-1}$
GJR-GARCH(1,1)	$\sigma_t^2 = \gamma + (1 - \nu_{t-1}) \beta \varepsilon_{t-1}^2 + \phi \sigma_{t-1}^2 + \varphi \nu_{t-1} \varepsilon_{t-1}^2$ $\nu_{t-1} = \begin{cases} 0 & \text{if } \varepsilon_{t-1} \leq 0 \\ 1 & \text{if } \varepsilon_{t-1} > 0 \end{cases}$
Box-Cox GARCH(1,1)	$\frac{\sigma_t^\lambda - 1}{\lambda} = \gamma + \beta \sigma_{t-1}^\lambda f^\omega \left(\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right) + \phi \frac{\sigma_{t-1}^\lambda - 1}{\lambda}$ $f \left(\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right) = \left \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} - \delta_0 \right - \delta_1 \left(\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} - \delta_0 \right)$

Los modelos del tipo GARCH y sus extensiones se estiman por el método de máxima verosimilitud, lo cual requiere de ciertos supuestos acerca del comportamiento del error ε_t . Tal como mencionan Manganelli y Engel (2001), si bien las características empíricas de los retornos indican grados de asimetría y leptokurtosis⁴, es usual asumir una distribución normal para los residuos, la cual además debe ser independiente y estable para toda la muestra⁵. Este es un

⁴ Leptokurtosis se refiere a que la distribución está muy centrada en la media pero con colas anchas debido a una cantidad de *outliers* (puntos alejados de la media) que supera el número que permitiría una distribución normal.

⁵ El supuesto de estabilidad e independencia es clave para poder generar la función de verosimilitud.





requerimiento necesario para estimar los parámetros desconocidos de la distribución. Una alternativa que mejora el ajuste a la característica leptokúrtica consiste en utilizar una función de distribución del tipo t-student. Esta tiene un grado de libertad que viene a agregarse como parámetro a ser estimado por el método de máxima verosimilitud.

CUADRO 2

DISTRIBUCIONES ESTADISTICAS PARA MODELAR RETORNOS

Normal	$f(\varepsilon_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2}\right]}$
t-Student	$f(\varepsilon_t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\kappa+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\kappa}{2}\right)\sqrt{\kappa}} \left(1 + \frac{\varepsilon_t^2}{\kappa}\right)^{-\frac{\kappa+1}{2}}$ $\Gamma(z) = \int_0^\infty \lambda^{z-1} e^{-\lambda} d\lambda$

La función a maximizar a través de algún método de optimización está definida por la multiplicatoria de las funciones de densidad individuales definidas en el Cuadro 2. Es decir, que la función a maximizar será $\Pi_t f(\varepsilon_t)$, la cual tradicionalmente es modificada por una transformación monótonica con logaritmos naturales, esto es: $\sum_t \ln f(\varepsilon_t)$. Los resultados numéricos son similares, facilitándose con esta modificación de linearización los procedimientos de búsqueda de la solución.

La hipótesis de normalidad parece no ser validada desde un punto de vista empírico. Sin embargo, tal como señalan Bollerslev y Woolridge (1992) y Manganelli y Engel (2001), parece ser que el supuesto de normalidad no es tan restrictivo como parece. Los autores demostraron que la maximización de un modelo GARCH utilizando una distribución normal es capaz de entregar estimadores consistentes aun cuando los residuos estandarizados no se distribuyan como una normal. La restricción que se requiere para conseguir este resultado es que la ecuación que representa a la varianza debe estar correctamente especificada. De aquí la importancia de incorporar elementos asimétricos en toda estimación de volatilidades, de manera de evitar una incorrecta especificación de la función de volatilidad. La siguiente sección muestra una aplicación en esta línea analizando una batería de modelos asimétricos para un índice accionario particular.



3.1. Una aplicación: Índice General de Precios de Acciones (IGPA) 1980-2001

Esta sección presenta una aplicación de la metodología discutida en la sección anterior, estimando un modelo para la serie mensual del Indicador General de Precios de Acciones IGPA con datos desde enero de 1980 hasta agosto del 2001, corregidos por el Índice de Precios al Consumidor IPC.

El modelo estimado se representa por:

$$(7) \quad \begin{aligned} r_t &= \theta + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &\sim N(0, \sigma_t^2) \\ \sigma_t^2 &= \gamma + \beta \varepsilon_{t-1}^2 + \phi \sigma_{t-1}^2 + \Psi(\varepsilon_{t-1}) \end{aligned}$$

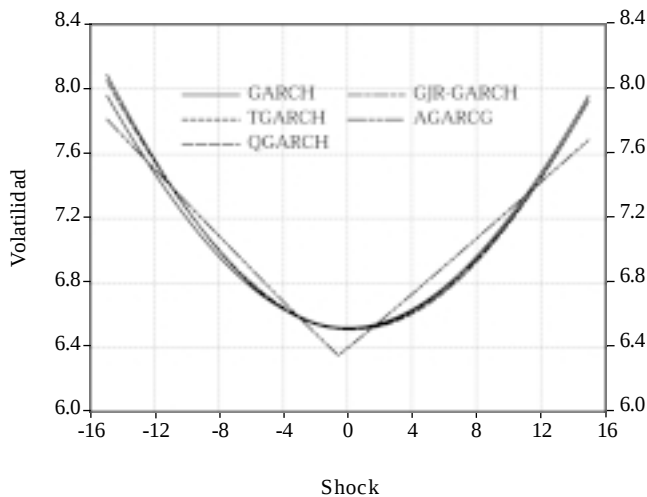
donde $\Psi(\varepsilon_{t-1})$ representa el ajuste requerido para estimar alguna de las funciones asimétricas del Cuadro 1.

El resultado de las estimaciones visualizado en el Gráfico 2 confirma la alta respuesta que posee la volatilidad de un activo frente a *shocks* negativos versus positivos. Una caída inesperada en los retornos ($\varepsilon < 0$) aumenta la varianza del retorno en un porcentaje mayor al estimado por el modelo simétrico GARCH, lo cual evidencia la persistencia pronunciada de “malas noticias” en el mercado *vis a vis* lo que ocurriría en esta materia con una “buena noticia”.

Esta estimación viene a confirmar la hipótesis de que *shocks* negativos son percibidos por el mercado como más permanentes que *shocks* positivos de igual magnitud. Esta “negatividad” o aversión del mercado también se presenta cuando se analiza una variable como la inflación (Johnson, 2001). En este caso, la asimetría viene dada hacia el sector de *shocks* positivos, de manera que incrementos inesperados de los precios tienden a incrementar la volatilidad más allá de lo que predice un modelo simétrico del tipo GARCH.

GRAFICO 3

RESPUESTA ASIMETRICA DE LA VOLATILIDAD





4. VaR APLICADO A ACTIVOS INDIVIDUALES

Esta sección presenta ejemplos de evaluación del riesgo de mercado, medido por el *VaR*, para un conjunto de instrumentos tradicionales como acciones y bonos, y para otros de mayor complejidad como son los contratos *Swaps*, *Forwards* y *Opciones*.

El análisis del riesgo de mercado, tal como se ha discutido, consiste en evaluar su potencial caída para un futuro preestablecido, típicamente un día o una semana, dependiendo de las necesidades de información requeridas por la dirección o gerencia de instituciones como bancos, Administradoras de Fondos de Pensiones (AFP) o compañías de seguros.

Toda evaluación de riesgo debe iniciarse con una proyección de los retornos del activo analizado, el cual muchas veces se efectúa sobre la base de comparaciones de curvas de rendimientos entre los períodos de tiempo de interés. Otras veces simplemente se proyectan directamente las volatilidades considerando alguna variante del modelo GARCH discutido en la sección anterior. Las siguientes secciones presentan diversas metodologías para analizar el riesgo considerando las características particulares de riesgo de cada activo.

4.1. Acciones

Este es uno de los activos de menor complicación al momento de evaluar su riesgo. Considerando una secuencia histórica de retornos, es decir ganancias de capital incluyendo dividendos, es posible estimar un proceso AGARCH, el cual permitirá proyectar la volatilidad desde t hasta $t + \Delta t$.

Análiticamente, el *VaR* para un título accionario se calcula a partir de una estimación GARCH para los retornos, representada por la ecuación (5) que se reproduce nuevamente:

$$(5) \quad \begin{aligned} r_t &= \theta + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &\sim N(0, \sigma_t^2) \\ \sigma_t^2 &= \gamma + \sum_{i=1}^p \beta_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \phi_j \sigma_{t-j}^2 \end{aligned}$$

Dado que disponemos de observaciones hasta el período t , entonces observamos ε_t y σ_t^2 de manera que podemos proyectar σ_{t+1}^2 a través de $\hat{\sigma}_{t+1}^2 = \hat{\gamma} + \sum_{i=1}^p \hat{\beta}_i \varepsilon_{t-i+1}^2 + \sum_{j=1}^q \hat{\phi}_j \sigma_{t-j+1}^2$. En la medida que el horizonte de evaluación del riesgo se aleje, será necesario efectuar simulaciones de Monte Carlo para generar secuencias de residuos que permitan proyectar los $\hat{\sigma}_{t+j}^2$.

Una aplicación para el caso de la acción CAP podría ser, nivel de significancia de 5%, i.e.: un factor de ajuste de 1,645 (α), volatilidad de CAP del 2% (σ) y horizonte de evaluación de una semana ($\Delta t = 5$) nos lleva a que el *VaR* de CAP para una inversión de diez millones de pesos (W) será del orden de:





$$\begin{aligned}
 VaR_{CAP} &= W \cdot \alpha \cdot \sqrt{\sigma^2 \cdot \Delta t} \\
 &= \$10.000.000 \cdot 1,645 \cdot 0,02 \cdot \sqrt{5} \\
 &= \$735.666,36
 \end{aligned}$$

4.2. Bonos con y sin cupones

Los retornos de los bonos provienen del cambio de sus precios, de los cupones que entrega y de la rentabilidad que se obtiene con estos flujos de cupones, lo que se denomina reinversión de cupones. Obviamente para el caso de un bono cero cupón, la rentabilidad viene dada solamente por las fluctuaciones en su precio.

Analíticamente, el retorno total puede descomponerse en:

$$(8) \quad r_t = \frac{\Delta p}{p} + c + c \cdot i$$

donde p define el precio del instrumento, c el cupón e i la tasa de interés que se obtiene de reinvertir los cupones.

Considerando que las evaluaciones de riesgo se hacen con un horizonte más bien corto de tiempo, los componentes asociados al cupón pierden relevancia al momento de analizar las fluctuaciones de los retornos del papel. Es así como es posible aproximar que: $r_t \approx \frac{\Delta p}{p}$.

Una relación muy conocida en el mercado financiero surge de la definición de *duración* de un bono. Si definimos el precio de un bono como el valor presente de los flujos futuros descontados a una tasa i , $p = \sum_t \frac{f_t}{(1+i)^t}$, entonces duración se define por $D = \frac{1}{p} \cdot \sum_t \frac{t \cdot f_t}{(1+i)^t}$, de manera que es posible generar la relación de precios y duración como:

$$(9) \quad \frac{\Delta p}{p} = - \frac{D}{1+i} \cdot \Delta i$$

donde el término al lado derecho de la expresión anterior que acompaña la variación de las tasas de interés Δi se denomina *duración modificada*.

Esta última expresión (9) nos permite relacionar los retornos de un bono a la duración de éste, y es posible verificar que aquellos bonos con cero cupón, cuya duración es por definición equivalente a la madurez del instrumento, son más riesgosos o volátiles que aquellos con una madurez similar pero que entregan cupones.

La volatilidad de este instrumento se puede deducir rápidamente de la expresión (9), pues si calculamos su varianza entonces:



$$\begin{aligned}\sigma_r^2 &= \sigma^2 \left(-\frac{D}{1+i} \cdot \Delta i \right) \\ &= \frac{D^2}{(1+i)^2} \sigma_{\Delta i}^2\end{aligned}$$

de manera que el *VaR* será una proporción definida por la volatilidad de los retornos, la cual a su vez es un factor de la volatilidad de las tasas de interés:

$$(10) \quad VaR_{Bono} = W \cdot \alpha \cdot \frac{D}{(1+i)} \sigma_{\Delta i} \cdot \sqrt{\Delta t}$$

Supongamos como ejemplo que se quiere evaluar la inversión de diez millones de pesos en un bono de madurez remanente de ocho años (es decir con una duración de seis años: *i.e.* 75% de la madurez remanente como aproximación) cuyo rendimiento es de 5,5%, con volatilidad de cambios de tasa de interés para el tramo correspondiente de 0,05%, y para un horizonte de cinco días (una semana). La ecuación (10) nos indica que el *VaR* es del orden de \$ 116.500:

$$\begin{aligned}VaR_{Bono} &= 10.000.000 \cdot 1,645 \cdot \frac{6}{(1+0,055)} 0,0005 \cdot \sqrt{5} \\ &= \$116.419,20\end{aligned}$$

Si el bono fuera de cero cupón, entonces su duración sería equivalente a su madurez, es decir ocho años, de manera que el *VaR* se vería incrementado a \$ 155.225,60, es decir en un 33% aproximadamente ($\frac{1}{75\%}$).

4.3. *Forwards* de monedas

Este instrumento consiste en que las partes acuerdan intercambiar divisas en un plazo predefinido, por ejemplo 30 días. El mercado valora los tipos de cambio *forwards* dependiendo del diferencial de tasas de interés de manera que el riesgo de la mantención del activo viene dado por la volatilidad y correlación que tengan las monedas que forman parte del contrato *forward*.

Analíticamente sabemos que la condición cubierta de tasas de interés es:

$$(11) \quad \frac{(1+i_t)}{(1+i_t^*)} = (1+_f\hat{e}_t)$$

donde i_t representa la tasa de interés doméstica, i_t^* la tasa extranjera y $_f\hat{e}_t$ la tasa de cambio pactada en el contrato *forward*.

Una aproximación permite derivar analíticamente el cambio en la tasa de cambio *forward* al asumir que: $i_t - i_t^* = _f\hat{e}_t$, de manera que: $\Delta i_t - \Delta i_t^* = \Delta _f\hat{e}_t$. Al aplicar operador varianza a esta volatilidad nos damos cuenta de los determinantes de riesgo de mercado que están detrás de un contrato *forward* de tipo de cambio:





$$(12) \quad \sigma_{\Delta\hat{e}}^2 = \sigma_{\Delta i}^2 + \sigma_{\Delta i^*}^2 - 2 \cdot \rho_{i,i^*} \cdot \sigma_{\Delta i} \cdot \sigma_{\Delta i^*}$$

lo cual directamente nos permite calcular el indicador de riesgo *VaR* para este tipo de instrumentos:

$$(13) \quad VaR_{\hat{e}} = W \cdot \alpha \cdot \sigma_{\hat{e}} \cdot \sqrt{\Delta t}$$

Por ejemplo, asumamos que un importador que cree que el dólar va a subir más allá de lo que dice el mercado *forward* desea cubrir un pago en dólares que debe efectuar en 90 días por US\$ 300.000,00. En este caso asumiendo que la volatilidad ($\sigma_{\hat{e}}$) de la desvalorización del tipo de cambio *forward* (en la práctica similar a la volatilidad del tipo de cambio *spot*) es de 1%, el *VaR* para los próximos 90 días será del orden de:

$$VaR_{\hat{e}} = 300.000 \cdot 1,645 \cdot 0,01 \cdot \sqrt{90} = 46.817,52$$

mientras que el *VaR* para los próximos 30 será de \$ 27.030,11 dólares.

4.4. *Forward* de tasas de interés

De manera equivalente al caso de los tipos de cambio (*forwards* de monedas), también podemos generar un indicador asociado a contratos a futuro de tasas de interés. Este instrumento consiste en pactar anticipadamente una tasa de interés desde y hasta un período predeterminado, por ejemplo pactar una tasa de depósito de 60 días pero que se inicie en 30 días más.

Analíticamente se deduce de la condición de arbitraje de tasas de interés a lo largo de una curva de rendimiento subyacente en la *Hipótesis de Expectativas de Tasas de Interés*.⁶ Sabemos que para el caso particular de arbitrar entre tasas de 3 y 6 meses, el compuesto de la tasa *spot* a 3 meses y la tasa *forward* de tres meses vigente en 3 meses más, debe ser equivalente a la tasa de depósito *spot* a 6 meses, es decir:

$$(14) \quad \left(1 + i_t^{t+3} \frac{3}{12}\right) \cdot \left(1 + f_{t+3}^{t+6} \frac{3}{12}\right) = \left(1 + i_t^{t+6} \frac{6}{12}\right)$$

expresión válida para cualquier estructura de plazos.

Generalicemos la ecuación de arbitraje anterior:

$$(15) \quad \left(1 + i_t^{t+\Delta\tau} \frac{\Delta\tau}{T}\right) \cdot \left(1 + f_{t+\Delta\tau}^{t+T-\Delta\tau} \frac{T-\Delta\tau}{T}\right) = \left(1 + i_t^{t+T} \frac{T}{12}\right)$$

de donde considerando generalmente que $T=12$, esta expresión puede ser aproximada por:

⁶ Revisar Ingersoll (1987) y Campbell *et al.* (1997).



$$(16) \quad i_t^{t+\Delta\tau} \frac{\Delta\tau}{12} + f_{t+\Delta\tau}^{t+12-\Delta\tau} \frac{12-\Delta\tau}{12} = i_t^{t+12}$$

Despejando la tasa *forward* y posteriormente sacando la primera diferencia nos podemos aproximar a la relación entre variación del rendimiento y cambio de precios de un activo, permitiéndonos obtener el *VaR*. Es decir:

$$(17) \quad \begin{aligned} f_{t+\Delta\tau}^{t+12-\Delta\tau} &= \frac{12}{12-\Delta\tau} \left(i_t^{t+12} - i_t^{t+\Delta\tau} \frac{\Delta\tau}{12} \right) \\ df_{t+\Delta\tau}^{t+12-\Delta\tau} &= \frac{12}{12-\Delta\tau} \left(di_t^{t+12} - di_t^{t+\Delta\tau} \frac{\Delta\tau}{12} \right) \end{aligned}$$

Si a la expresión (17) se le saca la varianza, considerando que $\frac{\Delta p}{p} = -\frac{D}{1+i} \cdot \Delta i$ (ver ecuación (9)), entonces, dado que la duración del contrato es por $D = 12 - \Delta\tau$:

$$(18) \quad \begin{aligned} \sigma_{\frac{\Delta p}{p}}^2 &= \sigma_{-\frac{12-\Delta\tau}{12} df_{t+\Delta\tau}^{t+12-\Delta\tau}}^2 = V \left\{ -\frac{12-\Delta\tau}{1 + f_{t+\Delta\tau}^{t+12-\Delta\tau}} \cdot \frac{12}{12-\Delta\tau} \cdot \left(di_t^{t+12} - di_t^{t+\Delta\tau} \frac{\Delta\tau}{12} \right) \right\} \\ \sigma_{\frac{\Delta p}{p}}^2 &\approx V \left\{ -12 \cdot di_t^{t+12} + di_t^{t+\Delta\tau} \Delta\tau \right\} \\ \sigma_{\frac{\Delta p}{p}}^2 &\approx 12^2 \sigma_{di_t^{t+12}}^2 + (\Delta\tau)^2 \sigma_{di_t^{t+\Delta\tau}}^2 - 24 \cdot \Delta\tau \cdot \rho_{(di_t^{t+12}, di_t^{t+\Delta\tau})} \sigma_{di_t^{t+12}} \sigma_{di_t^{t+\Delta\tau}} \end{aligned}$$

donde p define el coeficiente de correlación entre los respectivos cambios de tasas *spot* (a $\Delta\tau$ y a 12 meses). Esta expresión nos permite calcular el *VaR* de una posición *forward* a través de la tradicional relación

$$VaR_{forward} = W \cdot \alpha \cdot \sigma_{\frac{\Delta p}{p}} \cdot \sqrt{\Delta t}.$$

Consideremos el siguiente ejemplo. Para un depósito de 10 millones de dólares se contrata un FRA(3,9), es decir un contrato por 9 meses que parte en 3 meses a contar de hoy ($\Delta\tau = 3$). Asumiendo que:

$$\begin{aligned} \rho_{(di_t^{t+12}, di_t^{t+\Delta\tau})} &= 50\% \\ \sigma_{di_t^{t+12}} &= 0,02\% \\ \sigma_{di_t^{t+\Delta\tau}} &= 0,01\% \end{aligned}$$

entonces la varianza de los retornos del FRA será:

$$\begin{aligned} \sigma_{\frac{\Delta p}{p}}^2 &\approx 12^2 (0,0002)^2_{di_t^{t+12}} + (3)^2 (0,0001)^2_{di_t^{t+\Delta\tau}} - 24 \cdot (3) \cdot (0,5)_{(di_t^{t+12}, di_t^{t+\Delta\tau})} (0,0002)_{di_t^{t+12}} (0,0001)_{di_t^{t+\Delta\tau}} \\ \sigma_{\frac{\Delta p}{p}}^2 &\approx 0,00000513 = 0,00226495^2 \end{aligned}$$



entregando un *VaR* de:

$$\begin{aligned} VaR_{forward} &= 10.000.000 \cdot 1,645 \cdot 0,00226495 \cdot \sqrt{5} \\ &= 83.312,39 \end{aligned}$$

mientras que el *VaR* con un horizonte de un día para este contrato FRA alcanza a \$ 37.258,43, es decir un 0,37% del valor negociado.

4.5. SWAP de tasas de interés

Los *swaps* son acuerdos que se efectúan OTC (*over the counter*) entre inversionistas que desean intercambiar flujos futuros bajo condiciones preestablecidas al momento de pactar el *swap*. Se inician con una transacción de IBM y el Banco Mundial en 1981, pasando a ser uno de los instrumentos de inversión más moderno que se utilizan en la actualidad⁷. A partir de este contrato el mercado de los *swaps* se ha desarrollado exponencialmente.

Existen contratos para intercambiar divisas a futuro (*swap* de Monedas) y *swaps* que intercambian flujos de intereses (*swap* de Intereses). El *swap* de monedas consiste en que un agente conviene con el otro el intercambio de flujos de una divisa por otra a un precio definido, por ejemplo un exportador que tiene ingresos en dólares y posee un pasivo en euros hace un *swap* para que los ingresos futuros de dólares se transformen a euros.

El caso de *swaps* de tasas de interés es común traspasar flujos asociados desde tasa flotante a flujos de tasa fija o viceversa, dependiendo del movimiento esperado de las tasas de interés. Por ejemplo, en la medida que una empresa emite un bono corporativo a 5 años con cupón fijo, este pasivo a tasa fija puede ser transformado a tasa flotante a través de una operación *swap*. Esto operaría de la siguiente forma. La empresa al emitir su bono recibe sus ingresos por esta venta dependiendo del cupón que se compromete a pagar, el cual el mercado evalúa en función de la tasa de rendimiento de un papel de madurez similar. Esta diferencia determinará si el papel se vende sobre o bajo su valor par. Es así como el valor presente de los cupones descontados a la tasa de rendimiento a su madurez determina el precio del instrumento emitido. Si el emisor estima que la estructura de tasas de interés comenzará a disminuir, deseará traspasar al menos parte de sus obligaciones fijas a tasa flotante, por ejemplo asociada a la tasa LIBOR de seis meses. El contrato *swap* se elabora sobre el valor presente de las diferencias de los flujos (fijos versus variables) descontados a las tasas *forwards* implícitas en la curva *spot*.

Por ejemplo, analicemos el caso del bono soberano chileno que tiene las siguientes características a octubre del 2001: emisión de 500.000.000 de dólares, a tasa cupón semianual de 6,875, con vencimiento para el 28 de abril del 2009. Con estos antecedentes, el papel tiene una madurez remanente de 7,5

⁷ Existirían antecedentes de que se efectuaron contratos *forwards* en el siglo XII, contratos *futuros* en el siglo XVI y algunas *opciones* durante el siglo XVII. Ver Smithson and Smith (1995).



años, es decir una duración aproximada de 5,6 años (75%). La estructura de tasas americanas al 11 de octubre indica que el rendimiento del papel *benchmark* a dos años es de 2,9%, el de cinco años 3,9%, mientras que el del papel de 10 años tiene un rendimiento de 4,7%.⁸ Dada la relativa estabilidad del *spread* del papel chileno versus la tasa relevante americana, este bono ha sido una buena inversión al verse incrementado su valor de mercado. Por otra parte, los cupones se han emitido a tasa fija del 6,875, lo cual indica que semestralmente se debe hacer un pago total por concepto de cupones de aproximadamente 17,2 millones de dólares. El ejercicio consistiría en determinar qué habría ocurrido si al momento de la emisión del papel el Estado de Chile hubiese contratado un *swap* de tasas de interés por los intereses de los siguientes tres años (seis pagos de cupones). Alternativamente se podría evaluar la conveniencia de traspasar los flujos remanentes a tasa flotante, operación que sería sumamente atractiva si es que el emisor considera que las tasas *forwards* sobreestiman la real estructura de tasas prevaleciente en el futuro.

Consideremos la emisión del segundo bono soberano con madurez al 11 de enero de 2012 por 650 millones de dólares efectuado a una tasa de 7,25%, i.e. 255 puntos base de *spread* sobre el bono a 10 años americano. Inmediatamente contraída la obligación de pagar cupones fijos, la autoridad puede contratar un *swap* a tasa flotante si es que cree que el mercado no está internalizando una caída aun mayor en los niveles de actividad a través de la curva *forward*. De estar en lo correcto entonces el valor de este *swap* subiría y permitiría aliviar los flujos de cupones futuros, disminuyendo el costo de financiamiento para el país en algunos puntos base.

Para analizar un caso hipotético, asumamos que una empresa emite un pasivo (bono) en dólares a tasa flotante (LIBOR 6 Meses) a dos años con una curva de rendimiento *spot* como lo indica el cuadro siguiente:

CUADRO 3

CURVA DE RENDIMIENTO *SPOT*

6M	12M	18M	2Y
2,5%	2,7%	3,0%	3,3%

Lo primero que debemos calcular son las tasas *forwards* para estimar los flujos de los cupones variables a cancelar cada seis meses. Para esto utilizamos la curva *spot* y encontramos la tasa que permite arbitrar los distintos plazos:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{2,5}{100} \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{f_{6-12}}{100} \frac{1}{2}\right) &= \left(1 + \frac{2,7}{100}\right) \Rightarrow f_{6-12} = 2,8642\% \\ \left(1 + \frac{2,7}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{f_{12-18}}{100} \frac{1}{2}\right) &= \left(1 + \frac{3}{100} \frac{3}{2}\right) \Rightarrow f_{12-18} = 3,5054\% \\ \left(1 + \frac{3}{100} \frac{3}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{f_{18-24}}{100} \frac{1}{2}\right) &= \left(1 + \frac{3,3}{100} \frac{3}{2}\right) \Rightarrow f_{18-24} = 4,0191\% \end{aligned}$$

⁸ Fuente www.bloomberg.com.



A partir de estas tasas *forwards* es posible generar los flujos variables futuros que deberá cubrir el emisor (calculadas *ex-ante*) cada seis meses por los próximos dos años, considerando el primer flujo como conocido:

$$\begin{aligned}fv_6 &= \frac{2,5}{100} \frac{1}{2} \cdot 8.000.000 = 100.000,00 \\fv_{12} &= \frac{f_{6-12}}{100} \frac{1}{2} \cdot 8.000.000 = 114.567,90 \\fv_{18} &= \frac{f_{12-18}}{100} \frac{1}{2} \cdot 8.000.000 = 140.214,22 \\fv_{24} &= \frac{f_{18-24}}{100} \frac{1}{2} \cdot 8.000.000 = 160.765,55\end{aligned}$$

Una vez obtenidos los flujos se estima la variable C que viene a representar el cupón fijo que se quiere entregar en cada semestre, restringiendo que el valor presente de los flujos variables debe ser igual al valor presente de los flujos fijos o con cupones, es decir:

$$\frac{fv_6 - C}{\left(1 + f_6 \frac{1}{2}\right)} + \frac{fv_{12} - C}{(1 + f_{12})} + \frac{fv_{18} - C}{\left(1 + f_{18} \frac{3}{2}\right)} + \frac{fv_{24} - C}{\left(1 + f_{24} \frac{4}{2}\right)} = 0$$

El resultado para el cupón es: $C = 128.438,72$, lo cual implica que la tasa fija a la cual se estaría financiando es equivalente a t , y se desprende de resolver la siguiente expresión:

$$\frac{fv_6 - C}{\left(1 + t \frac{1}{2}\right)} + \frac{fv_{12} - C}{(1 + t)} + \frac{fv_{18} - C}{\left(1 + t \frac{3}{2}\right)} + \frac{fv_{24} - C}{\left(1 + t \frac{4}{2}\right)} = 0$$

La resolución indica que la tasa fija a la cual se debe pactar el *swap* es: $t = 3,6069\%$.

Claramente el valor de este contrato *swap* irá cambiando en la medida que las tasas *spot* futuras no sean equivalentes a las tasas *forwards* calculadas al momento de contratar el *swap*. Luego, si las tasas *forwards* son buenas predictoras de las *spots* futuras, el valor del *swap* no se verá fuertemente afectado de manera que su *VaR* debiera estar en torno a cero. En resumen, el valor del *swap* estará dado por la siguiente expresión:

$$(19) \quad p_{\text{swap}} = \sum_{j=6,12,18,24,\dots} \frac{W \cdot (f_j - t)}{\left(1 + t_j \cdot \left(\frac{j}{12}\right)\right)}$$

De manera que una vez pactado el *swap*, dado que la tasa fija y el valor nominal del *swap* W son constantes, entonces los retornos de este *swap* provenirán de la variabilidad de las tasas *spot*, las cuales por construcción modifican las tasas *forwards*, de manera que:



$$(20) \quad \frac{\Delta p}{p} = P\left(\{t_j\}\right)$$

Si se aproxima esta expresión por una expansión de Taylor de primer orden, podemos decir que los retornos de este *swap* vienen dados por la variabilidad de las tasas de interés *spots* a lo largo del tiempo, es decir:

$\frac{\Delta p}{p} = r_t = \rho_1 \Delta t_1 + \rho_2 \Delta t_2 + \rho_3 \Delta t_3 \dots + \rho_M \Delta t_M$, de manera que el *VaR* para un *swap* surge de analizar la volatilidad de los cambios en las tasas de interés para toda la estructura de la curva relevante asociada a la madurez del *swap*:

$$(21) \quad VaR_{swap} = \alpha \cdot W \cdot \sigma \left[\frac{\Delta p}{p} \right] \cdot \sqrt{\Delta t}$$

5. VaR PARA PORTAFOLIOS DE N ACTIVOS

El *Value at Risk* es un concepto poderoso que ha sido implementado a través de diversas metodologías. Esta sección hace una revisión de las múltiples metodologías existentes para evaluar el riesgo de portafolios con n activos,⁹ presentando alternativas para generar la matriz de varianzas y covarianzas con la cual se cuantifica el *VaR*. Más allá de los procesos GARCHs discutidos, existen mecanismos para la simulación de retornos que permiten hacer un cálculo del *VaR*, ya sea desde un punto de vista paramétrico como no paramétrico. A continuación se describen las principales metodologías tradicionales de estimación del *VaR*.

5.1. Método delta-normal

El método más simple de cálculo del *VaR* es el método delta-normal. Este consiste en asumir que los retornos tienen una distribución normal e idénticamente distribuida de manera que si los retornos esperados para un portafolio de n activos se definen como:

$$(22) \quad E[R_p] = \omega' \cdot E[R]$$

entonces la varianza de este portafolio se representa por:

$$(23) \quad \sigma_p^2 \equiv \omega' \cdot E[\Sigma] \cdot \omega$$

donde ω es un vector columna de ponderadores no negativos que suman uno, y Σ define la matriz de varianzas y covarianzas para los retornos de los n activos.

⁹ Para complementar revisar Johnson (2000).



El algoritmo para calcular el *VaR* partiría definiendo la matriz de varianzas y covarianzas con la base histórica de retornos o se puede incluir alguna valoración de desviaciones estándar por medio de las volatilidades implícitas de opciones. Esta última alternativa tiene el problema práctico de que no todos los instrumentos que conforman un portafolio poseen una opción transable en el mercado, característica que se ve fortalecida en portafolios con monedas o papeles corporativos y soberanos de mercados emergentes. De existir esta opción, dada la diversidad de *strikes*¹⁰ y madureces disponible, la norma es utilizar la opción más transada ATM¹¹ (*at the money*) que generalmente es la que tiene una madurez remanente de 30 ó 90 días.

Una vez aplicada alguna metodología de optimización, se tiene la ponderación de los instrumentos, con lo cual se procede a calcular el *VaR* para el portafolio especificado considerando un nivel de significancia establecido, típicamente de un 5%, lo que implica un ajuste de la volatilidad de 1,645:

$$(24) \quad VaR_p \equiv \alpha \cdot \sqrt{\omega' \cdot E[\Sigma] \cdot \omega} \cdot \sqrt{\Delta t}$$

El cálculo del *VaR* va en relación a la frecuencia de la base de datos, lo que hace necesario el ajuste por el parámetro Δt . Si la frecuencia de la base de datos de retornos es diaria y se desea calcular el *VaR* para 5 días en adelante (una semana) entonces se debe multiplicar por $\sqrt{5}$. El Cuadro 4 resume las correcciones que se deben realizar dependiendo del horizonte de análisis para una base de retornos diaria (*W* es el monto del portafolio en \$):

CUADRO 4

ANUALIZACION DE LAS MEDIDAS DE RIESGO

Estadístico	1 Día	Semana	Mes	Año
Retorno	μ_d	$5 \cdot \mu_d$	$20 \cdot \mu_d$	$240 \cdot \mu_d$
Varianza	σ_d^2	$5 \cdot \sigma_d^2$	$20 \cdot \sigma_d^2$	$240 \cdot \sigma_d^2$
Desv. Estándar	σ_d	$\sigma_d \cdot \sqrt{5}$	$\sigma_d \cdot \sqrt{20}$	$\sigma_d \cdot \sqrt{240}$
<i>VaR</i>	$-\alpha \cdot \sigma_d \cdot W$	$-\alpha \cdot \sigma_d \cdot \sqrt{5} \cdot W$	$-\alpha \cdot \sigma_d \cdot \sqrt{20} \cdot W$	$-\alpha \cdot \sigma_d \cdot \sqrt{240} \cdot W$

¹⁰ Precio al cual se ejerce una opción *Call* o *Put*.

¹¹ ATM se refiere a aquella opción cuyo precio de ejercicio (*strike*) es similar al precio *spot* del activo subyacente.



Podemos generalizar el cálculo de VaR para períodos diferentes t_1, t_2 como:

$$VaR_1 = -\alpha \cdot \sigma \cdot \sqrt{\Delta t_1} \cdot W$$

$$VaR_2 = -\alpha \cdot \sigma \cdot \sqrt{\Delta t_2} \cdot W$$

de manera que podemos ajustar el VaR para diferentes períodos por:

$$VaR_2 = -\alpha \cdot \sigma \cdot \sqrt{\Delta t_2} \cdot W = -\alpha \cdot \sigma \cdot \sqrt{\Delta t_1} \cdot W \cdot \frac{\sqrt{\Delta t_2}}{\sqrt{\Delta t_1}}$$

con lo cual se llega finalmente a la siguiente expresión que relaciona dos medidas de riesgo con horizonte diferente:

$$(25) \quad VaR_2 = VaR_1 \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1}\right)}$$

Es decir, que si, por ejemplo, el VaR para un día es de \$ 20.000, entonces para una semana y un mes serán de \$ 44.721 y \$ 89.443, respectivamente.

5.2. Método de simulación histórica

Una segunda alternativa consiste en aplicar el vector de ponderadores de inversión vigentes a una serie representativa de retornos históricos, de manera de generar una secuencia de valores de portafolio que pueden ser representados estadísticamente por un histograma. A partir de esta secuencia de valoración histórica que define una cierta distribución de probabilidades, se procede a calcular el VaR .

La secuencia de retornos se obtiene de multiplicar los ponderadores actuales, representados por el vector columna ω con los retornos históricos de cada momento τ :

$$(26) \quad R_\tau = \omega' \cdot R_{i\tau}$$

Luego cada uno de estos retornos se utiliza para determinar el valor del portafolio durante el siguiente período, de manera que si consideramos 90 días hacia atrás, entonces tendremos 90 valoraciones de portafolio. Sacando la desviación estándar de las distintas valoraciones del portafolio (σ_H) podemos hacer el cálculo del VaR mediante la fórmula estándar ($VaR_H = -\alpha \cdot \sigma_H \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot W$), considerando un nivel de significancia α preestablecido.

La metodología de simulación histórica es equivalente analíticamente al método delta-normal revisado en la sección anterior, a menos que la matriz de varianzas y covarianzas del método delta-normal sea alimentada de información proveniente de opciones, donde en cuyo caso se reemplazaría la volatilidad



histórica por la volatilidad implícita que el mercado ha generado para el instrumento respectivo.

5.3. Método de *Stress-Testing* o método de situaciones extremas

Es común asumir que los retornos son procesos estocásticos estacionarios que obedecen a una cierta distribución normal. Sin embargo, la existencia frecuente de *outliers* debilita tal supuesto. El método de *Stress-Testing* incrementa la ponderación de los eventos extremos negativos en la secuencia de valoración del portafolio. Por medio de la recreación de escenarios adversos históricos, o la simple generación de eventos negativos, este método cuantifica los cambios probables en los valores del portafolio.

Los *outliers* y el grado de simetría (*skewness*) y ancho de colas (*leptokurtosis*) es una característica ampliamente difundida en la literatura¹². La distribución empírica de la mayoría de las distribuciones de series financieras muestran un grado de leptokurtosis mayor al presente en la distribución normal. Esto implica que si calculamos un *VaR* considerando la distribución normal, estaríamos subestimando la pérdida potencial del portafolio, puesto que el área bajo las colas es superior al implícito en la función de distribución normal.

En la práctica, el análisis de *Stress-Testing* se puede realizar de diversas formas. Una alternativa puede ser la elección de una secuencia de retornos para un período específico del tiempo que represente según el administrador de portafolio un escenario futuro probable. Es decir, que si disponemos de retornos mensuales desde 1990 en adelante, consideremos, por ejemplo, solamente los períodos en que hubo guerra en el Medio Oriente, o los períodos de crisis económicas (efectos tequila, crisis asiática y rusa, entre otros), o los períodos de grandes fluctuaciones del valor del Yen, o períodos de fuertes correcciones de precios de acciones (crisis bursátiles), etc. En este contexto, claramente el valor del *VaR* calculado según las metodologías anteriormente mencionadas subestima las eventuales pérdidas del portafolio vigente.

Una segunda opción es simular eventos adversos que no necesariamente hayan estado presentes en la serie histórica. Este mecanismo se alimenta del análisis simultáneo de un *grid* multidimensional de diferentes eventos, cada uno de los cuales es ponderado por un vector de probabilidades, dando origen así a un vector de valoraciones de portafolios que permitirán el cálculo del *VaR*. En la práctica, su implementación se ve limitada a la valoración de eventos discretos, dejando gran parte de los *shocks* potenciales fuera del análisis. Este análisis de escenarios es incapaz de cubrir todas las posibilidades que pueden hacer disminuir el valor de un portafolio.

Adicionalmente, podemos efectuar un *Stress-Testing* manipulando la descomposición de la matriz de varianzas y covarianzas en correlaciones y desviaciones estándar. Este ejercicio implicaría modificar los valores que componen la matriz diagonal de desviaciones estándar, como también los valores de la matriz diagonal de correlaciones de retornos entre activos¹³.

¹² Revisar Johnson (2000) para una discusión sobre la Teoría de Valores Extremos (EVT).

¹³ La metodología de afectar la matriz de varianzas y covarianzas a través de modificar las matrices de desviaciones y de correlaciones se puede revisar con detalle en Johnson (2000).



Por último, el método de *Stress-Testing* puede implementarse a través de la Teoría de Valores Extremos (EVT) que consiste en el estudio de las colas de las distribuciones de probabilidad¹⁴.

5.4. Método de simulaciones de Monte Carlo y *Bootstrapping*

Una metodología más sofisticada e intensiva en computadora es la de simulaciones de Monte Carlo. Esta consiste, en la generación de múltiples realizaciones para los retornos de un activo (o activos) con un horizonte predefinido, como por ejemplo una semana o un mes (T). Estas realizaciones deben ser generadas a partir de una función de distribución de probabilidades que represente al proceso estocástico simulado, es decir, por ejemplo, los retornos simulados para una acción específica deben ser generados de una distribución normal con media 4% y desviación estándar 2%. Alternativamente, estos retornos pueden ser generados a través de un muestreo (con reemplazo) de la data existente histórica por medio de la técnica del *bootstrapping*.¹⁵

Una vez simuladas las diversas trayectorias de tamaño T (usualmente el número de trayectorias generadas es grande, *i.e.*, 5.000 o 10.000 realizaciones) se obtienen los valores del retorno para el horizonte de inversión o análisis preestablecido (5 días o un mes). Con estos 5.000 o 10.000 valores se procede a calcular la desviación estándar del retorno del activo, de manera de generar su *VaR*.

El procedimiento es bastante directo si el portafolio consiste en un activo. Sin embargo, si la cartera de inversiones está compuesta por n activos, entonces se deben simular 10.000 realizaciones para una secuencia de largo T para cada uno de esos n activos. Si los instrumentos no están correlacionados entre sí, el ejercicio sería simplemente repetir n veces (una vez por instrumento) el mismo procedimiento que se siguió para el caso de un activo. Sin embargo, si las correlaciones entre los instrumentos no son nulas, la simulación de los retornos debe considerar tales covarianzas, lo cual complica el procedimiento de generación de procesos estocásticos. Para esta situación lo tradicional es utilizar algún mecanismo de identificación de la estructura de la matriz de varianzas y covarianzas por medio de una descomposición de ésta, generalmente utilizando la descomposición de Choleski.¹⁶

La generación de procesos estocásticos a través de simulaciones de Monte Carlo es un avance necesario en la medida que se tienen portafolios con instrumentos asimétricos, como por ejemplo opciones. Si la cartera contiene solamente instrumentos lineales, los resultados del proceso de simulación con la metodología de Monte Carlo o *bootstrapping* serán equivalentes al resultado del análisis de simulación histórica, o a la metodología delta-normal si no consideramos la volatilidad implícita en las opciones. La ventaja de este procedimiento surge de su flexibilidad para evaluar el riesgo de portafolios cuyos retornos son necesariamente asimétricos, como suele suceder en portafolios que contienen opciones sobre instrumentos o monedas.

¹⁴ Ver Danielsson y Vries (1997) y Johnson (2000).

¹⁵ Ver Hamilton (1994) para revisar este concepto.

¹⁶ Hamilton (1994) y Johnson (2000) presentan desarrollado este tópico.





6. VALUE AT RISK AJUSTADO POR LIQUIDEZ

Esta sección presenta la metodología de valoración de riesgo, o *Value at Risk* (*VaR*), y explica el ajuste necesario sobre este estimador para permitir una evaluación más precisa de la pérdida potencial de valor que un portafolio o activo presentará, en eventos en que la liquidez de este activo o cartera se vea perturbada, lo cual se representaría por un incremento en los márgenes de precios de compra y venta (*Bid-Ask spreads*) en el mercado. En este sentido, Huang y Stoll (1997) realizan una descomposición de los *spreads* para un conjunto de 20 acciones de alta presencia bursátil utilizando información de *spreads* de la Bolsa de Nueva York (NYSE), y encuentran que tanto el ajuste a los precios absolutos como al *spread* bid-ask se ve incrementado en la medida que el volumen transado se incrementa. Según el estudio, uno de los componentes relevantes del *spread* bid-ask se refiere al concepto de liquidez (endógena). Este se presentaría en la medida que un agente deje de ser tomador de precio al momento de vender sus posiciones, influyendo negativamente en el precio dependiendo del monto deseado a vender. En la medida que eventos de requerimiento de liquidez se presenten, el inversionista se verá obligado a evaluar el *trade-off* de vender los activos inmediatamente, asumiendo un costo de venta, o implementar un ejercicio de venta secuencial de manera de minimizar este costo, influyendo así marginalmente en el precio del papel, pero incurriendo en el costo de la liquidez que gatilló la decisión de venta.

Subramanian y Jarrow (1999) mencionan que la existencia del riesgo de liquidez se puede deber a la existencia de información asimétrica, o por motivos de inventario¹⁷, e introducen un concepto denominado *descuento por liquidez*. Este descuento surge si un inversionista frente a necesidades de fondos se ve obligado a vender parte de su portafolio, hecho que influirá negativamente en el precio de mercado (efecto cantidad sobre el precio, el cual no existe con agentes atomísticos), dando fundamentos a que el precio de liquidación difiera del precio de mercado (la diferencia se denomina *descuento por liquidez*). Los autores presentan una metodología de cálculo que permitiría ajustar el *VaR* tradicional por este concepto de descuento; sin embargo, las variables requeridas para su cálculo no están disponibles para la mayoría de los activos que presentarían estas características, y en especial para el mercado internacional de papeles soberanos chilenos, lo cual hace muy difícil su implementación práctica (ver Bangia *et al.*, 1999). Las siguientes secciones desarrollan la metodología adoptada para la medición del descuento por liquidez.

6.1. Ajuste por liquidez exógena

El cálculo tradicional del *VaR* asume que el diferencial de compraventa (*spread* bid-ask) es básicamente estable en el tiempo, de manera que es posible efectuar los cálculos indistintamente con los valores de cierre, o valores medio de compra y/o venta del instrumento en cuestión. Sin embargo, los *spreads* efectivos no son estables para activos que enfrentan una liquidez limitada (Huang y Stoll, 1997), como es la de los papeles soberanos de algunos países emergen-

¹⁷ Revisar Glosten y Milgrom (1985), y Grossman y Miller (1988).



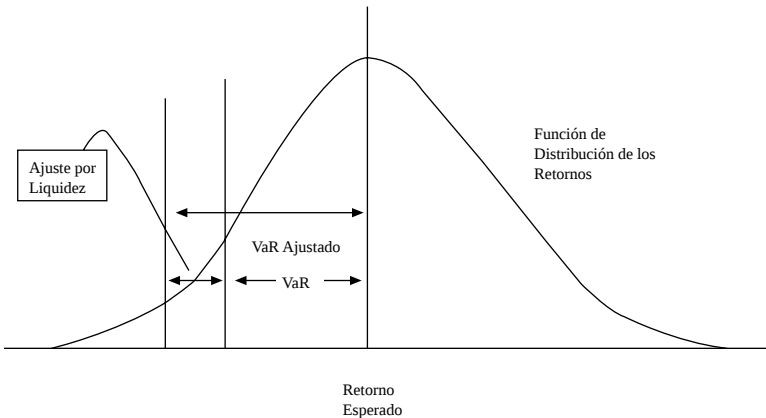
tes¹⁸, entre los cuales se encuentran las notas soberanas chilenas. Es así como los cálculos tradicionales del *VaR* quedarán subestimados debido a que al momento de requerir de la liquidación del activo el mercado no esté dispuesto a ofrecer el precio deseado por el instrumento en el lapso de tiempo requerido, debiendo afrontarse un menor ingreso por concepto de venta del activo.

La relevancia de una eventual subestimación se puede extrapolar al análisis del riesgo de un sistema financiero como un todo. Bangia *et al.* (1998, 1999) revelan que las regulaciones del BIS¹⁹ subestiman el riesgo de portafolios al no considerar estimaciones ajustadas por la volatilidad de los *spreads*. Aquellas instituciones que poseen elevadas proporciones de activos provenientes de economías emergentes subestimarán su real probabilidad de riesgo.

Es posible representar gráficamente el concepto de ajuste por liquidez al potenciar el *VaR* calculado tradicionalmente por un factor que será función del comportamiento del *spread bid-ask* del instrumento analizado (Gráfico 4).

GRAFICO 4

DIAGRAMA COMPARATIVO DEL VAR VERSUS EL VAR AJUSTADO POR LIQUIDEZ



Este coeficiente de ajuste por liquidez²⁰ es función directa del *spread* que se puede conseguir en el mercado al momento de decidir la venta de un activo. Para generar este coeficiente definimos el componente de riesgo por iliquidez siguiendo la conceptualización adoptada por Bangia *et al.* (1998, 1999), que representan una versión simplificada e implementable del modelo de Jarrow y Subramanian (1997, 1999). Estos últimos modelan el ajuste *endógeno* por liquidez, entendiendo por éste al que se obtiene de incorporar volúmenes de ac-

¹⁸ Por ejemplo, aquellos pertenecientes al *Emerging Market Bond Index* (EMBI).

¹⁹ *Bank for International Settlements*.

²⁰ Un índice de "iliquidez" podría ser el factor multiplicativo de la velocidad a la que se vende el activo al precio esperado según condiciones de mercado normales, y alternativamente se puede definir como el *spread* de compraventa del instrumento.



tivos transados en momentos de requerir financiamiento. Es así como no sería lo mismo enfrentar la venta de algún activo ilíquido en un monto marginal para los volúmenes usualmente transados del instrumento versus el participar en el mercado con volúmenes que superan con creces los estándares normales de transacción del instrumento analizado. Existiría un punto sobre el cual ya el nivel de iliquidez por motivos de monto de transacción se incrementa, evidenciándose un aumento de los *spreads bid-ask* del instrumento. Sin embargo, la aplicabilidad de la metodología de cálculo del grado de iliquidez endógeno exige una base de datos de montos transados que difícilmente está disponible²¹, lo cual le quita validez práctica y potencia empírica al modelo propuesto por Jarrow y Subramanian. Es así como dejando de lado aspectos volumétricos o de iliquidez endógena, se adopta la metodología propuesta por Bangia *et al.* (1998, 1999), la cual se enfoca en el componente de iliquidez *exógena*, entendiéndose por ésta a aquella que es independiente de los volúmenes transados.

El concepto básico sobre el cual se efectúan los análisis se conoce como *spread relativo* (ρ) y se genera a partir de la siguiente expresión:

$$(27) \quad \rho_t = \frac{(Bid_t - Ask_t)}{\left[\frac{Bid_t + Ask_t}{2} \right]}$$

donde *Ask* se refiere al precio de venta y *Bid* al precio de compra de un instrumento, es decir el diferencial entre el precio de compra y el precio de venta, calculado como una proporción del valor promedio de compra y venta transado.

Es usual categorizar el grado de liquidez de un instrumento en función del diferencial existente entre los precios de venta y compra ("las puntas"), el cual puede ser reflejo de diversos factores ya sean fundamentales (aspectos macrofinancieros del emisor) y/o técnicos (ruido de mercado reflejado en soportes, resistencias, volatilidad, estocásticos, etc.). En la medida que este *spread* sea mínimo, se estaría en presencia de un activo con un alto grado de liquidez, por ejemplo un papel nominal del tesoro norteamericano. Es así como el indicador de *spread* "relativo" permite generar un índice comparable entre distintos instrumentos que se transan en diferentes denominaciones o escalas²².

A partir del *spread* relativo ρ_t se genera el coeficiente de ajuste por liquidez definido por:

$$(28) \quad \delta_t = 0.5 \cdot \rho_t \cdot (\bar{\rho} + \theta \cdot \tilde{\sigma}_t)$$

²¹ Incluso para los activos más líquidos la disponibilidad de información de montos transados (por ejemplo, en bonos norteamericanos de madurez remanente de 5 años) es imposible de obtener, debido a la cantidad de agentes que transa este activo. Sin embargo, no se da lo mismo con el precio de activo. Este es posible de obtener fácilmente en cualquier sistema de información estándar de la industria, como, por ejemplo, *Reuters*, *Bloomberg* o *Telerate*.

²² Por ejemplo el Yen japonés se transa a niveles de 100 Yenes por dólar mientras que el Euro se transa a niveles de 0.95 dólares por Euro. Lo mismo sucede en instrumentos de renta fija de distintas características de emisión cuyos precios no necesariamente están a valor par.



donde p_t representa al precio medio del activo en el período t , $\bar{p}$ el promedio muestral del *spread* relativo, $\tilde{\sigma}_t$, la desviación estándar del *spread* relativo en el período t , y θ corresponde al factor de ajuste que produce típicamente el 99% de cobertura del proceso para los *spreads*.

La valoración del riesgo sobre la base de precios medios explica el ajuste necesario por el factor de liquidez expresado en la ecuación (28). De existir un *spread* estable equivalente a $\bar{p} = \rho_0$ con una desviación estándar nula ($\tilde{\sigma}_t = 0$), entonces el factor de ajuste correspondería a la mitad del *spread* relativo, lo cual define finalmente que el precio considerado para el análisis del riesgo es el de venta.

Es empíricamente poco factible encontrar distribuciones normales para los *spreads*²³, lo cual inhabilita a la tabla de distribución normal para aportar valores al factor θ . Es así como empíricamente se sigue la proposición de Bangia *et al.* (1998, 1999), simulando con factores de ajuste θ entre 2 y 5. Los autores describen una metodología para escoger este factor de ajuste. Empíricamente encuentran que existe una relación entre el coeficiente de kurtosis y este factor de ajuste que obedece a la relación:

$$(29) \quad \theta = 2,33 \cdot \left[1,0 + \psi \cdot \ln\left(\frac{\kappa}{3}\right) \right]$$

donde si la serie de *spread* proviene de una normal, entonces el factor de ajuste será 1 pues la kurtosis representada por κ es 3. El parámetro ψ empíricamente lo estimaron en 0,4.

A diferencia del modelo propuesto por Bangia *et al.* (1998), el coeficiente de ajuste propuesto en (29) no sólo cambia por modificaciones en el precio *spot* del instrumento, sino que también por cambios en la volatilidad (GARCH). Es así como en modelos con volatilidad variable, la serie $\tilde{\sigma}_t$ se obtiene de la estimación efectuada por máxima verosimilitud en lugar de aplicar la fórmula de desviación estándar constante a toda la serie de *spread* relativo²⁴.

6.2. Metodología de ajuste por liquidez para portafolios con múltiples activos

Esta metodología, presente originalmente en Johnson (2001c), es de mayor utilidad al considerar un portafolio con múltiples activos puesto que se consideraría una eventual correlación entre los factores de iliquidez que potenciarían aun más la subestimación del riesgo del portafolio.

²³ Por ejemplo, considerando los *spreads* para el papel chileno, los coeficientes centrados de skewness y kurtosis son 2,11 y 3,35 respectivamente (ambos se rechazan estadísticamente como nulos), entregando un test de Jarque-Bera de 38,8, con un p-value de 0, lo cual rechaza absolutamente la hipótesis de normalidad de la serie. Ver Johnson (2001c) para una aplicación de esta metodología al primer papel soberano chileno emitido en dólares norteamericanos.

²⁴ Bangia *et al.* (1998, 1999) estiman una desviación estándar aplicando $\hat{\sigma}^2 = \sum (\rho_t - \bar{\rho})^2 / (n - 1)$ como parámetro del coeficiente de ajuste para toda la muestra.





Si consideramos un portafolio de n activos, cada uno de los cuales posee un VaR_n que permite formar una matriz diagonal V con sus respectivos $VaRs$. Si los retornos de estos n activos poseen una matriz de correlación C , y el vector columna de ponderadores de estos activos en el portafolio es ω , entonces el VaR del portafolio se representará por:

$$(30) \quad VaR_p = \sqrt{\omega' \cdot V \cdot C \cdot V \cdot \omega} \cdot \sqrt{\Delta t}$$

Luego, para considerar el factor de *spread* variable modificamos el cálculo del VaR de los activos individuales por el factor de iliquidez, de manera que la matriz diagonal original V se transforma en $\tilde{V} = V + \Omega$, donde Ω representa la matriz diagonal de elementos de iliquidez δ_n asociados a cada activo n que conforma la cartera bajo análisis.

De esta manera, el VaR ajustado consideraría el VaR tradicional y las correlaciones y desviaciones aumentadas producto del aumento de los *spreads* en un subconjunto de los activos analizados:

$$(31) \quad \begin{aligned} \tilde{VaR}_p &= \sqrt{VaR_p^2 + 2 \cdot \omega' \cdot V \cdot C \cdot \Omega \cdot V \cdot \omega + \omega' \cdot V \cdot \Omega \cdot C \cdot \Omega \cdot V \cdot \omega} \\ \tilde{VaR}_p &\geq VaR_p \end{aligned}$$

Es así como se hace evidente la subestimación del VaR al no considerar el ajuste por *spreads* volátiles representada por la matriz diagonal Ω .

¿Qué tan aplicable son estos conceptos desde un punto de vista institucional? A continuación efectuaremos una aplicación de evaluación del riesgo histórico para tres instituciones financieras chilenas, a partir de sus utilidades operacionales.

7. VALUE AT RISK APLICADO A INSTITUCIONES FINANCIERAS

Desde 1995 el BIS incorpora la medición de riesgo de mercado como un factor adicional y relevante en la determinación del *stock* de capital requerido para instituciones financieras. A partir de la crisis asiática a mediados de 1997, y con mayor fuerza desde la crisis de la deuda rusa²⁵ en agosto de 1998, junto a la quiebra del LTCM en septiembre del mismo año²⁶, se reforzó la idea de que las instituciones financieras debieran incluir en su manejo de riesgo algún con-

²⁵ Esta se refiere a la devaluación del rublo en agosto y la moratoria de la deuda en septiembre del mismo año, dificultando algunas posiciones activas de bancos europeos, especialmente alemanes.

²⁶ El *Long Term Capital Management* (LTCM) fue fundado en 1994 con domicilio tributario en las Islas Caimán, por entre otras personas dos premios Nobel en economía, Robert Merton y Myron Scholes. Debido a las altas posiciones en el mercado de derivados (futuros sobre bonos y acciones, opciones sobre acciones y tasas de interés, y *forwards* de monedas, entre otros) que superaban varias veces su capital, la crisis asiática y el *flight to quality* llevó a que perdiera casi la mitad de su capital (1.800 millones de dólares de un capital que ascendía a casi 4 mil millones), lo que obligó al FED a intervenirlo proponiendo un aporte mayoritariamente de 300 millones de dólares de cada uno de los 16 bancos directamente comprometidos, de manera de recomponer su capital y cambiar su propiedad.



cepto de volatilidad de mercado, lo cual ayudó a que metodologías como el *Value at Risk* se difundiera.

A modo de ejemplo de cómo aplicar esta metodología a instituciones financieras, a continuación se analiza la evolución histórica del *Value at Risk* para tres de estas instituciones.

7.1. Una aplicación al caso chileno: tres grandes bancos

Para aplicar la metodología consideramos datos mensuales desde enero de 1990 a septiembre de 2001 de utilidades operacionales de tres grandes bancos privados que operan en Chile. Las series reales fueron desestacionalizadas por X-12. Se estimó para las variaciones porcentuales de estas utilidades un modelo de volatilidad simétrica del tipo GARCH(p,q), con la siguiente representación:

$$\begin{aligned} r_t &= \theta + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &\sim N(0, \sigma_t^2) \\ \sigma_t^2 &= \gamma + \beta \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \phi \sigma_{t-1}^2 + \phi_2 \sigma_{t-2}^2 \end{aligned} \quad (32)$$

Los resultados para estos tres bancos privados indican significativa evidencia de que los retornos tienen un comportamiento para su volatilidad que bien puede ser proyectado con un modelo del tipo GARCH²⁷. Los retornos anualizados para los tres bancos son 8,1%, 12,4% y 9,7% respectivamente (ver Cuadro 5), y los modelos reportados corresponden a los mejores según el criterio de minimización estándar de Akaike.

CUADRO 5

ESTIMACION GARCH (p, q) PARA BANCOS CHILENOS²⁸

Coeficiente	Banco 1	Banco 2	Banco 3
θ	0,678374 (0,4034)	1,031342 (0,0046)	0,810201 (0,2809)
γ	10,06992 (0,0421)	3,011204 (0,0000)	8,843388 (0,0013)
β -ARCH(1)	0,418837 (0,0148)	0,298762 (0,0025)	0,075332 (0,0628)
ϕ -GARCH(1)	0,616602 (0,0000)	0,703005 (0,0002)	0,807293 (0,0000)
β -ARCH(2)		-0,312825 (0,0000)	
ϕ -GARCH(2)		0,254116 (0,0249)	

²⁷ Se evaluaron representaciones alternativas (otro orden de p y q) y también modelos de volatilidad asimétricos, no existiendo evidencia robusta en esta dirección.

²⁸ P-Values entre paréntesis.



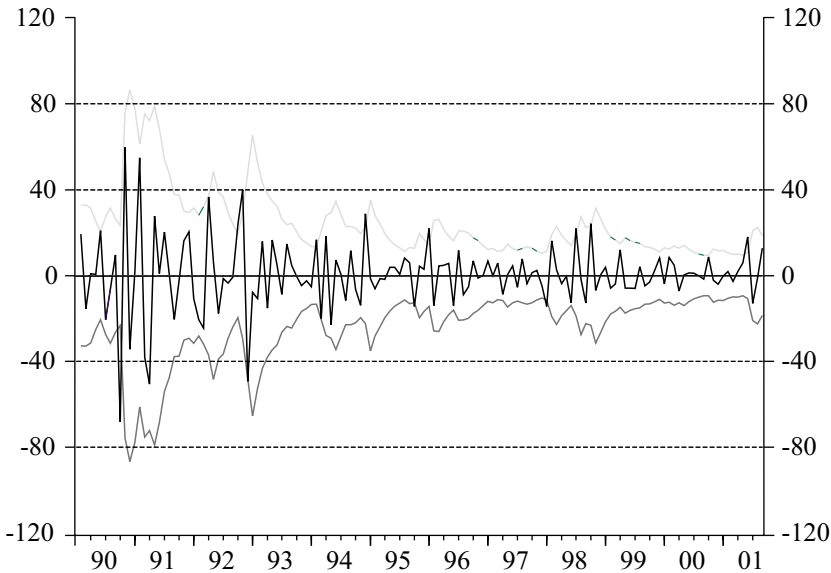
La volatilidad proyectada para la muestra a partir de los modelos de volatilidad variable indica la fuerte inestabilidad prevaleciente a principios de la década pasada, la cual fue lentamente disminuyendo a medida de que la economía presentaba niveles de crecimiento estables (Gráficos 5, 6 y 7).

A partir de mediados de 1997 se percibe un incremento en los niveles de riesgo. El Banco 1 incrementa su volatilidad de 10 a 30%, mientras que el Banco 3 sube de 15 a 20% su riesgo. Las estimaciones para el Banco 2 no indican incremento en su volatilidad más allá de lo normal. Sin embargo, para los tres bancos se percibe un incremento de la volatilidad de sus retornos, y por ende de sus respectivos *Value at Risk*, a partir del segundo semestre del 2001.

Más allá de los resultados particulares de este ejercicio, el ejemplo apunta a presentar la metodología y sus bondades en términos de evaluación del riesgo sistémico de una institución, lo cual es particularmente útil para organismos fiscalizadores como las superintendencias o bancos centrales²⁹.

GRAFICO 5

VALUE AT RISK (90%) PARA BANCO 1



²⁹ Revisar Bekowitz y O'Brien (2001).



GRAFICO 6

VALUE AT RISK (90%) PARA BANCO 2

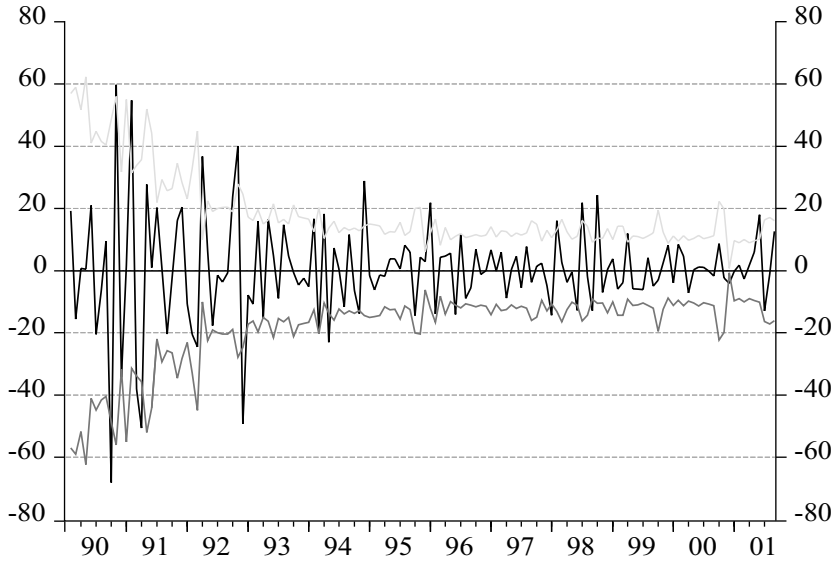
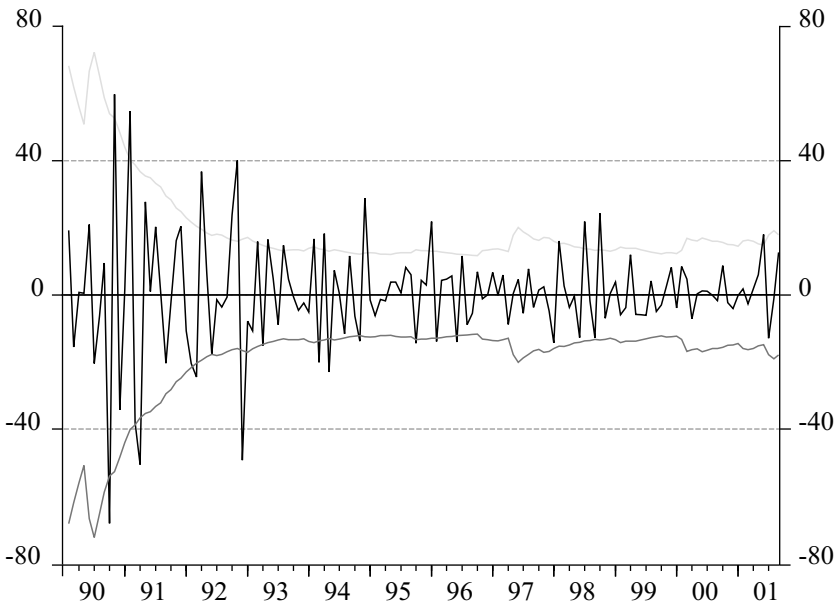


GRAFICO 7

VALUE AT RISK (90%) PARA BANCO 3





8. CONCLUSIONES

La relevancia de contar con un estimador para el riesgo de un portafolio o activo particular es evidente dada la creciente volatilidad de los precios de los activos.

Este artículo presenta metodologías de evaluación de riesgo de mercado ya sea desde una perspectiva microfinanciera, analizando los niveles de riesgo para instrumentos financieros como bonos, acciones, *swaps* y *forwards*, como desde un punto de vista macrofinanciero o institucional. Para este caso efectuamos una aplicación de concepto *Value at Risk* para evaluar las utilidades operacionales a una muestra de tres bancos chilenos. Este ejercicio reporta el incremento en el riesgo que se presencié desde fines de 1997, a partir de la crisis asiática, y cómo éste se ha comenzado a diluir a partir de 1999.

Se presentan aplicaciones econométricas utilizando modelos de volatilidad del tipo GARCH, y se describen modelos asimétricos alternativos que suelen ser relevantes al momento de evaluar el riesgo de activos financieros como bonos y acciones.

Ciertamente esta metodología se ha comenzado a difundir a nivel conceptual, y este artículo permite una aproximación más rigurosa al tema, presentando ejemplos prácticos aplicados tanto a nivel de instrumentos específicos como de instituciones financieras en su conjunto.

REFERENCIAS

- Bangia, A.; Diebold, F.; Schuermann, T. y Strouhair, J. (1999). "Liquidity on the Outside". *Risk Magazine* 12 (6): 68-73.
- Bangia, A.; Diebold, F.; Schuermann, T. y Strouhair, J. (1998). "Modeling Liquidity Risk: with implications for traditional market risk measurement and management". Manuscrito. Oliver, Wyman & Co.-NYU, diciembre.
- Berkowitz, J. y O'Brien, J. (2001). "How Accurate are Value-at-Risk Models at Commercial Banks?" *Finance and Economics Discussion Series* N° 31, Federal Reserve Board.
- Best, P. (1998). *Implementing Value at Risk*. EE.UU.: New York. John Wiley & Sons.
- Bollerslev, T. (1986). "Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity". *Journal of Econometrics* 31: 307-327.
- Bollerslev, T. y Woolridge, J. M. (1992). "Quasi-Maximum Likelihood Estimation and Inference in Dynamic Models with Time Varying Covariances". *Econometric Reviews* 11: 143-172.
- Campbell, J.; Lo, A. y MacKinlay, A. C. (1997). *The Econometrics of Financial Markets*. EE.UU.: New Jersey. Princeton U. Press.
- Danielsson, J. y De Vries, C. G. (1997). "Value at Risk and Extreme Returns". Manuscrito, Tinbergen Institute Rotterdam.
- Dowd, K. (1998). *Beyond Value at Risk: The New Science of Risk Management*. EE.UU.: New York. John Wiley & Sons.
- Engle, R. (1982). "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of the United Kingdom Inflation". *Econometrica* 50: 987-1008.



- Glosten, L. y Milgrom, P. (1985). "Bid, Ask and Transaction Prices in a Specialist Market with Heterogeneously Informed Traders". *Journal of Financial Economics* 14: 71-100.
- Grossman, S. y Miller, M. (1988). "Liquidity and Market Structure". *Journal of Finance* 43 (3): 617-637.
- Hamilton, J. (1994). *Time Series Analysis*. EE.UU.: New Jersey. Princeton U. Press.
- Henstschel, L. (1995). "All in the Family: Nesting Symmetric and Asymmetric GARCH Models". *Journal of Financial Economics* 39: 71-104.
- Hill, B. (1975). "A Simple General Approach to Inference About the Tail of a Distribution". *Annals of Statistics* 35: 1163-1173.
- Hols, M. y De Vries, C. G. (1991). "The Limiting Distribution of Extremal Exchange Rate Returns". *Journal of Applied Econometrics* 6: 287-302.
- Huang, R. y Stoll, H. (1997). "The Components of the Bid-Ask Spread: A General Approach". *Review of Financial Studies* 10 (4): 995-1034.
- Ingersoll, J. (1987). *Theory of Financial Decision Making*. EE.UU.: Maryland. Rowman & Littlefield.
- Jackson, P.; Maude, D. y Perraudin, W. (1998). "Bank Capital and Value at Risk". *Working Paper*, Bank of England.
- Jarrow, R. y Subramanian, A. (1997). "Mopping up Liquidity". *Risk Magazine* 10 (12): 170-173.
- Jarrow, R., y A. Subramanian (1999). "Liquidity Discount". Manuscrito, Cornell University, julio.
- Johnson, C. (2001a). "Inflation Uncertainty in Chile". Manuscrito, Banco Central de Chile.
- Johnson, C. (2001b). "Un Modelo de Intervención Cambiaria". *El Trimestre Económico* 271: 339-367.
- Johnson, C. (2001c). "Un Análisis de la Volatilidad del Bono Soberano Chileno". *Revista Análisis Económico* 16 (1): 83-97.
- Johnson, C. (2000). "Métodos de Evaluación del Riesgo para Portafolios de Inversión". *Documento de Trabajo* N° 67, Banco Central de Chile, marzo.
- Jorion, P. (2000). *Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Market Risk*. McGraw-Hill.
- J. P. Morgan (1996). *RiskMetrics-Technical Document*. Diciembre.
- Manganelli, S.; Engle, R. (2001). "Value at Risk Models in Finance". *Working Paper* N° 75, European Central Bank.
- Mausser, H. y Dan Rosen (1999). "Beyond VaR: Triangular Risk Decomposition". *Algo Research Quarterly* 2 (1): 31-43.
- Penza, P. y Bansal, V. (2001). *Measuring Market Risk with Value at Risk*. EE.UU.: New York: John Wiley & Sons.
- Rao, C. R. (1973). *Linear Statistical Inference and Its Applications*, 2ª ed. EE.UU.: New York. John Wiley & Sons.
- Smithson, C. y Smith, C. (1995). *Managing Financial Risk: A Guide to derivative Products, Financial Engineering, and Value Maximization*. EE.UU.: New York. Irwin Professional Publishing.